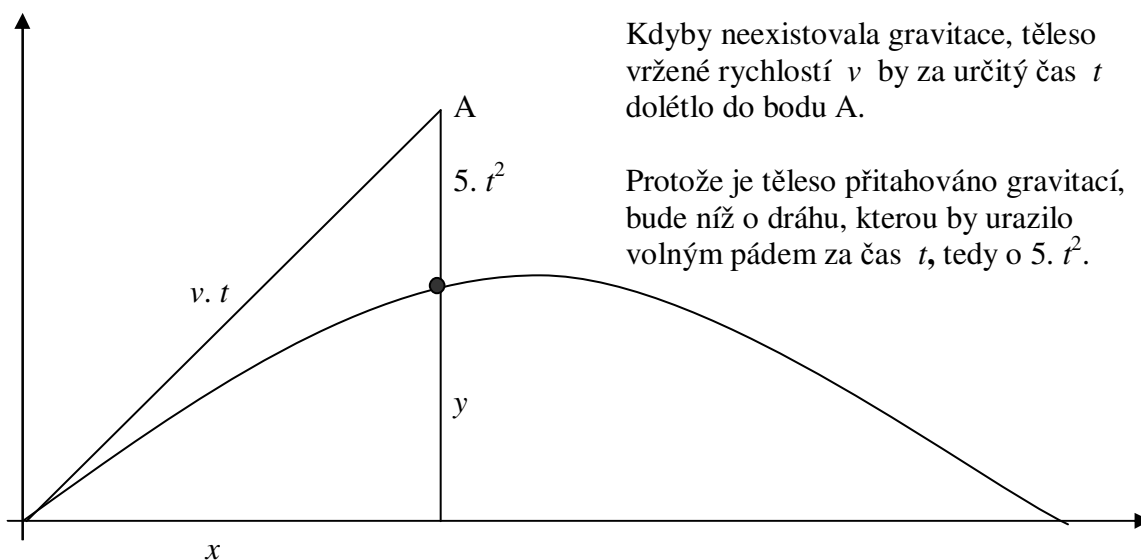


Po jaké dráze letí těleso, které je vrženo šikmo vzhůru?

Například koule či kladivo při vrhačských disciplínách lehké atletiky, dělostřelecký náboj, vodní proud z hasičské hadice, atd.?

Skutečně reálný pohyb tělesa je dosti komplikovaný, my budeme dráhu počítat za předpokladu, že můžeme zanedbat odpor vzduchu. Dále budeme uvažovat jen ten případ, že těleso bude vrženo pod úhlem 45° – dá se dokázat, že pak je vrh nejdelší.

Těleso vlivem gravitace letí po křivce, které se říká parabola (je symetrická podle svislé osy). Popišme matematicky tuto křivku:



Vypočítejme nejprve obě souřadnice x , y bodu, v němž bude těleso, uplynul-li od počátku vrhu čas t (bude nám užitečná znalost souvislosti strany a úhlopříčky čtverce):

$$x = \frac{v \cdot t}{\sqrt{2}} \qquad y = \frac{v \cdot t}{\sqrt{2}} - 5 \cdot t^2$$

- 1) Vypočítejte z prvního vztahu čas t a dosaďte za t do druhého vztahu (nezapomeňte krátit a na závěr vytknout).

Odpověď: $t = \frac{x\sqrt{2}}{v}$ $y = \frac{v}{\sqrt{2}} \cdot \frac{x\sqrt{2}}{v} - 5 \cdot \frac{2x^2}{v^2}$

$$y = x - 10 \cdot \frac{x^2}{v^2}$$

$$y = x \cdot \left(1 - \frac{10x}{v^2}\right)$$

- 2) Zvolme si počáteční rychlost vrhu například $v = 10$ (m/s).

Dosaďte za v do získaného vzorce pro y , a výraz upravte do tvaru zlomku.

Dosazujte postupně za x a tabelujte pro tuto rychlost souřadnice bodů na letové parabole (můžete počítat paměti!):

Odpověď:
$$y = x \cdot \left(1 - \frac{x}{10}\right) = \frac{x \cdot (10 - x)}{10}$$

x (m)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y (m)	0,0	0,9	1,6	2,1	2,4	2,5	2,4	2,1	1,6	0,9	0,0

3) Nakreslete co nejpřesněji graf závislosti y na x (letové dráhy).

Odpověď: Viz následující obrázek.

4) Kde v tabulce naleznete délku vrhu D a výšku vrhu V ? Jak z tabulky poznáte, že je dráha osově souměrná? Jak poznáte, podle které svislé osy?

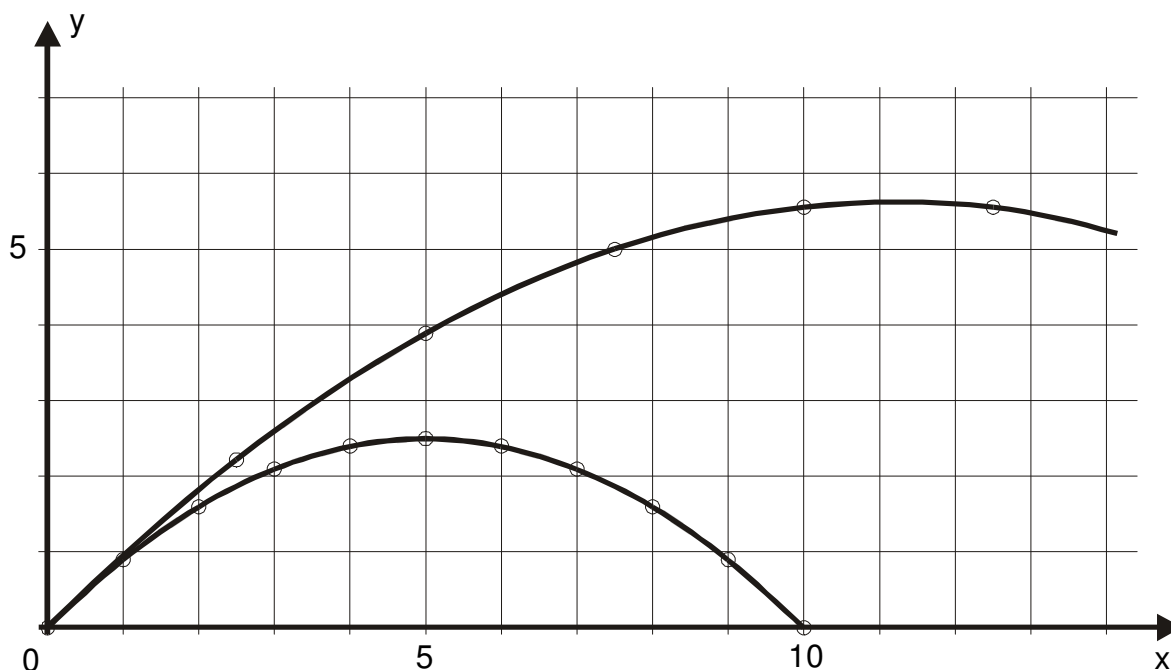
Odpověď: Délka vrhu je x -ová souřadnice druhého bodu s nulovou y -ovou souřadnicí. Výška vrhu je největší y -ová souřadnice. Souměrnost poznáme z rovnosti y -ových souřadnic bodů s x -ovými souřadnicemi x a $10 - x$ (viz vzorec). Z toho plyne, že souměrnost je určena svislou osou procházející bodem $[5;0]$.

5) Zvolte si sami jinou počáteční rychlost vrhu v .

Opět dosadte za v do vzorce pro y , výraz upravte, dosazujte za x , atd. Nový graf zakreslete do téhož obrázku.

Odpověď: Pro $v = 15$ (m/s) obdržíme
$$y = \frac{x \cdot (22,5 - x)}{22,5}$$

x (m)	0,0	2,5	5,0	7,5	10,0	12,5	15,0	17,5	20,0	22,5
y (m)	0,000	2,222	3,889	5,000	5,556	5,556	5,000	3,889	2,222	0,000



6) Pokuste se vyřešit obecně i následující úlohy, které vám pomohou odhalit další poznatky:

- Dokážete pomocí vzorce pro y (kde se na pravé straně vyskytuje x a v) vypočítat délku vrhu D ? (Uvažte, že na dráze jsou jen dva body, které mají y -ovou souřadnici rovnou nule. Prvním je počátek, délka D je x -ová souřadnice druhého bodu.)

Odpověď: $1 - \frac{10D}{v^2} = 0 \Rightarrow v^2 = 10D \Rightarrow D = \frac{v^2}{10}$

- Dokážete ze vzorce pro y vypočítat výšku vrhu V ? (Uvědomte si symetrii paraboly a uvažte, jakou hodnotu musíte dosadit za x , aby vám vyšlo největší y . Využijete pochopitelně řešení předchozí úlohy.)

Odpověď: $V = \frac{v^2}{20} \cdot \left(1 - \frac{10 \cdot \frac{v^2}{20}}{v^2}\right) = \frac{v^2}{20} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{v^2}{40}$

- Jaká je vzájemná souvislost délky D a výšky V ? (Nalezený vztah samozřejmě platí jen pro dráhy těles, která jsou vržena pod úhlem 45° .)

Odpověď: $V = \frac{D}{4}$

- Dokážete vypočítat celkovou dobu T , po kterou je těleso ve vzduchu? (Můžete využít vzorce pro čas t a uvědomit si, jaká volba souřadnice x určuje celkovou dobu pohybu.)

Odpověď: $T = \frac{v^2}{10} \cdot \frac{\sqrt{2}}{v} = \frac{v\sqrt{2}}{10}$

Právě nalezené vztahy vám umožní řešit řadu konkrétních úloh. UVědomte si, že problém může být zadán kteroukoliv z následujících veličin – buď počáteční rychlostí v , nebo délkou vrhu D , nebo výškou vrhu V či celkovou dobou vrhu T , a že ve všech případech pak můžeme vypočítat všechny ostatní veličiny.

7) Řešte následující úlohy

- Vypočítejte hodnoty všech veličin pro výkony vrcholových lehkých atletů v kouli či kladivu – třeba při světových rekordech. Můžete i tabelovat souřadnice jednotlivých bodů dráhy společně s časy, které jim odpovídají. (Vrhy diskem nebo oštěpem se pomocí našich vzorců nedají počítat, protože tam se podstatně uplatňuje odpor vzduchu.)

Odpověď: Následující tabulky ukazují hodnoty při vrzích s délkou 20 m a 80 m.

$D = 20 \text{ m} \Rightarrow v = 14,14214 \text{ m/s}, V = 5 \text{ m}, T = 2 \text{ s}.$

x	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
y	0,00	1,80	3,20	4,20	4,80	5,00	4,80	4,20	3,20	1,80	0,00
t	0,00	0,20	0,40	0,60	0,80	1,00	1,20	1,40	1,60	1,80	2,00

$$D = 20 \text{ m} \Rightarrow v = 14,14214 \text{ m/s}, V = 5 \text{ m}, T = 2 \text{ s}.$$

<i>x</i>	0	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
<i>y</i>	0,00	7,20	12,80	16,80	19,20	20,00	19,20	16,80	12,80	7,20	0,00
<i>t</i>	0,00	0,40	0,80	1,20	1,60	2,00	2,40	2,80	3,20	3,60	4,00

- Vypočítejte hodnoty všech veličin pro vrh, kdy bylo dosaženo výšky 15 metrů.

$$V = 15 \text{ m} \Rightarrow v = 24,4949 \text{ m/s}, D = 60 \text{ m}, T = 3,46 \text{ s}.$$

- Vypočítejte hodnoty všech veličin pro vrh, který trval 5 vteřin.

$$T = 5 \text{ s} \Rightarrow v = 35,35534 \text{ m/s}, D = 125 \text{ m}, V = 31,25 \text{ m}.$$